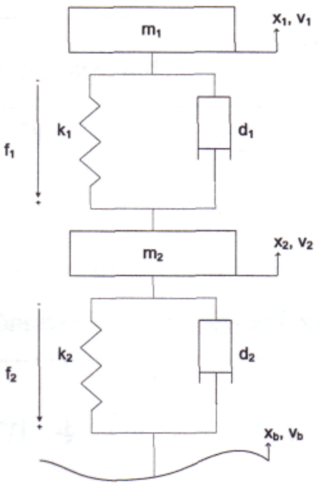
Uitgewerkte versie tentamen 2 nov. 2009.

Naam:	Student ID:	Datum:

Opgave 1 (10 punten)

Gegeven is een "quarter-car" model, welke het suspensiesysteem van een kwart auto modelleert. Het gangbare model dat in de industrie gebruikt wordt, modelleert de chassis met een massa en de koppeling van de chassis met het wiel middels een veer en demper. De positie en snelheid van de chassismassa, m_1 worden weergegeven door x_1 en v_1. De positie en snelheid van het wiel, m_2, worden weergegeven door x_2 en v_2. Daarnaast geven x_b en v_b de relatieve positie van de weg en verticale snelheid a.g.v. de horizontale snelheid van de auto en de verandering van het wegprofiel. Daarnaast zijn de dempers d_1, d_2 en de veren k_1 en k_2 lineair verondersteld. f_1 en f_2 zijn veerkrachten en in het figuur wordt daarmee de positieve richting aangegeven.



a). Hoeveel kinetische- en potentiële energie-opslag elementen heeft bovenstaand systeem? Motiveer uw antwoord.

5

Kinetische energie opslag : m_1 en m_2
2 2 massa's $\left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right)$

Potentiële energie opslag : k_1 en k_2
2 2 veren $\frac{1}{2}k_1(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2-x_b)^2$

b). Hoeveel toestanden heeft u minimaal nodig voor een toestandsmodel? Motiveer uw antwoord.

5

4 Toestanden. 2

Aantal energie-opslagelementen = aantal toestanden. 3

Naam:	Student ID:	Datum:

Opgave 2 (20 punten)

Beschouw hetzelfde systeem als in Opgave 1. Neem nu aan dat we het wiel niet mee modelleren, bv. omdat de band zo stijf is dat er geen invloed vanuit gaat. D.w.z., we modelleren m_2, k_2 en d_2 niet mee en de invloed van de weg komt rechtstreeks binnen bij de chassis veer en demper k_1 en d_1. Neem nu aan dat de demper d_1 niet lineair is en dat de dempingskracht gegeven wordt door $F_d = -d_1 v_1^3$.

a). Wat is de Lagrangiaan van het chassis systeem?

5

$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} k_1 (q_1 - x_b)^2 - m_1 g (q_1 - x_0)$ 2 2 1

q_1: positie m_1, $\dot{q}_1$: snelheid m_1, x_0: referentie "grond".

b). Wat is de Rayleigh dissipatie functie van bovenstaand systeem?

5

$D(\dot{q}) = +\frac{1}{4} d_1 \dot{q}_1^4$

$\boxed{\text{- teken fout : -1}}$

Ook goed: $D(\dot{q}) = +\frac{1}{4} d_1 (\dot{q}_1^4 - v_b^4)$

hier verwarrend i.v.m. v_b

$(\dot{q}_1 - v_b)^4$ ook goed rekenen!

c). Geef de Euler-Lagrange vergelijkingen van bovenstaand systeem.

5

$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 (q_1 - x_b) + m_1 g = -d_1 \dot{q}_1^3$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1$ 1 $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -k_1 (q_1 - x_b) - m_1 g$ 1

$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = +d_1 \dot{q}_1^3$ 1

d). Bepaal een toestandsmodel op basis van de Euler-Lagrange vergelijkingen.

5

$x_1 = q_1, \quad x_2 = \dot{q}_1$ 2

eventueel: $(x_2 - v_b)^3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{m_1}(x_1 - x_b) - g - \frac{d_1}{m_1} x_2^3 \end{cases}$$ 3

nb: géén lineaire beschrijving

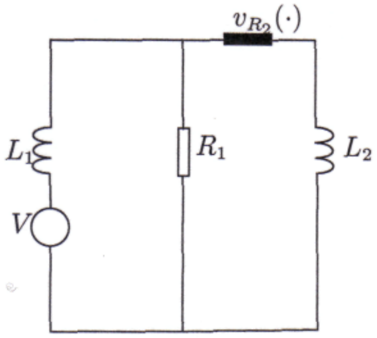
Naam:	Student ID:	Datum:

Z.O.Z.

Naam:	Student ID:	Datum:

Opgave 3 (20 punten)

Beschouw onderstaand elektrisch RL netwerk. Weerstand 2 is niet-lineair, met $v_{R_2} = i_2 + i_2^3$. $L_1 > 0$ en $L_2 > 0$ corresponderen met een lineaire spoel, waardoor de stromen i_1 en i_2 lopen. $R_1 > 0$ is een lineaire weerstand en V de spanning van de spanningsbron. We zijn geïnteresseerd in de stroom door R_1, dus de uitgang kiezen we als $y = i_2 - i_1$.



Met $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$ en $u = V$ hebben we het volgende toestandsmodel:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}(x_1 - x_2) + \frac{1}{L_1}u$$
$$\dot{x}_2 = \frac{R_1}{L_2}(x_1 - x_2) - \frac{1}{L_2}(x_2 + x_2^3).$$
$$y = x_2 - x_1$$

a). Bepaal het evenwichtspunt of de evenwichtspunten van dit systeem voor $u = 0$. Motiveer uw antwoord!

5

$u=0$: 2 $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2(1 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

Dus 1 evenwichtspunt $(0,0)$

b). Lineariseer het systeem rond een evenwichtspunt uit a). Motiveer uw antwoord!

$f_1(x) = -\frac{R_1}{L_1}(x_1 - x_2)$ $\quad g_1(x) = \frac{1}{L_1}$ 2

$f_2(x) = \frac{R_1}{L_2}(x_1 - x_2) - \frac{1}{L_2}(x_2 + x_2^3)$ $\quad g_2(x) = 0$

$h(x) = x_2 - x_1$

8

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} - \frac{1}{L_2} - \frac{3}{L_2}x_2^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & \frac{-R_1 - 1}{L_2} \end{pmatrix}$$ 2

$B = g(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ 2 $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$
$\bar{y} = C\bar{x}$

$\bar{x} = x$, $\bar{u} = u$, $\bar{y} = y$
vlakbij $(0,0)$ $u=0$

c). Bepaal het evenwichtspunt of de evenwichtspunten van dit systeem voor $u = 10$. Wat betekent dit evenwichtspunt fysisch? Motiveer uw antwoord!

7

$u=10$ (1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 & \Rightarrow R_1(x_1 - x_2) = 10 \ (1) \\ \dot{x}_2 = 0 & 10 - (x_2 + x_2^3) = 0 \ (1) \Rightarrow x_2 = 2 \ (1) \end{cases}$

$x_1 = \frac{10}{R_1} + 2$ (0) (4)

Fysisch: constante spanningsbron, in evenwicht loopt constante stroom. Door L_2, 2 en door L_1 $\frac{10}{R_1}+2$, afh. van R_1 (2)

Naam:	Student ID:	Datum:

Naam:	Student ID:	Datum:

Opgave 4 (15 punten)

Gegeven een continue tijd toestandssysteem met ingang $u(t)$, uitgang $y(t)$ en $t \in \mathbb{R}$ beschreven door

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

a). Is dit toestandssysteem stabiel? Motiveer uw antwoord! (Hint: eigenwaarden).

3

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 2 > 0$ dus instabiel

2 1

b). Bepaal de overdrachtsfunctie van dit systeem.

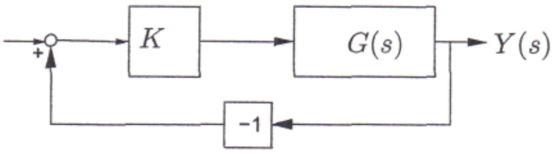
4

$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s-2)} \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}$ 2 $\quad C = (1 \;\; 0)$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C(sI-A)^{-1} = (s-2 \quad -1) \frac{1}{(s+2)(s-2)}$ 1

$C(sI-A)^{-1}B = \frac{-s+2-1}{(s+2)(s-2)} = \frac{-s+1}{(s+2)(s-2)} = \frac{-s+1}{s^2-4}$ 1

c). Noem de overdrachts functie $G(s)$ en beschouw $KG(s)$, met K een constante. Beschouw



de overdracht nu in gesloten lus zoals hierboven. Gebruik het Routh-Hurwitz criterium om te bepalen of er een K bestaat waarvoor het gesloten lus systeem stabiel is. Zo ja, wat is de waarde van K? Zo nee, motiveer uw antwoord!

8

$1 + KG(s) = 1 + \frac{K(-s+1)}{s^2-4} = \frac{s^2 - Ks + K - 4}{s^2-4} = 0$

$\Rightarrow \boxed{s^2 - Ks + K - 4 = 0}$ 3

s^2:	1	$K-4$
s:	$-K$	0
1:	$K-4$	0

2

géén tekenwisseling voor $-K > 0$ en $K-4 > 0 \Rightarrow K < 0$ en $K > 4$
Géén oplossing, dus er is geen K waarvoor gesloten lus stabiel is.

3

$a_2 = 1$
$a_1 = -K$
$a_0 = K-4$
$b_1 = \frac{1}{K} \begin{vmatrix} 1 & K-4 \\ -K & 0 \end{vmatrix}$
$= K-4$

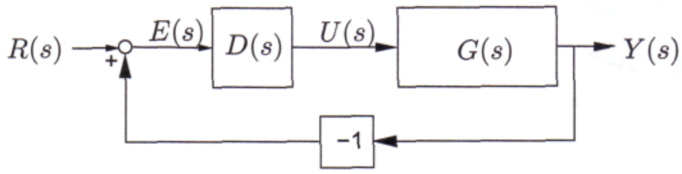
Naam:	Student ID:	Datum:

Opgave 5 (15 punten)

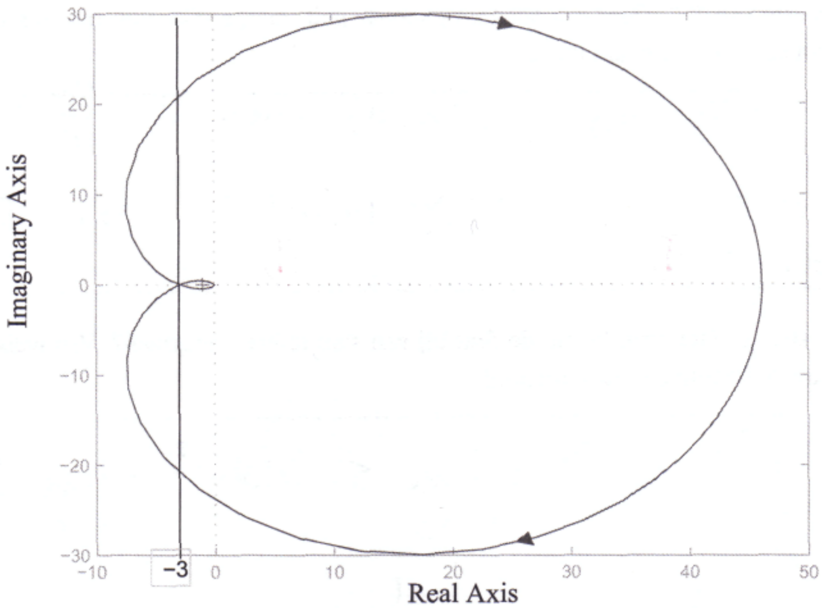
Gegeven is het gesloten lus systeem dat een benzinemotor beschrijft zoals hieronder. Daarbij zijn de volgende overdrachtsfuncties van belang:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)}, \qquad D(s) = \frac{1}{\tau_t s + 1}.$$

De uitgang y is de snelheid van de motor en het doel is dat de snelheid een referentiesignaal r volgt. De loop overdrachtsfunctie is $L(s) = D(s)G(s)$.



a). Beschouw de Nyquist plot van L met $K = 54$ zoals hieronder gegeven. Bepaal met behulp van het Nyquist criterium of het gesloten lus systeem stabiel is. Geef Z, N en P. Voor welke waarde van K is het gesloten lus systeem stabiel? Motiveer uw antwoord!

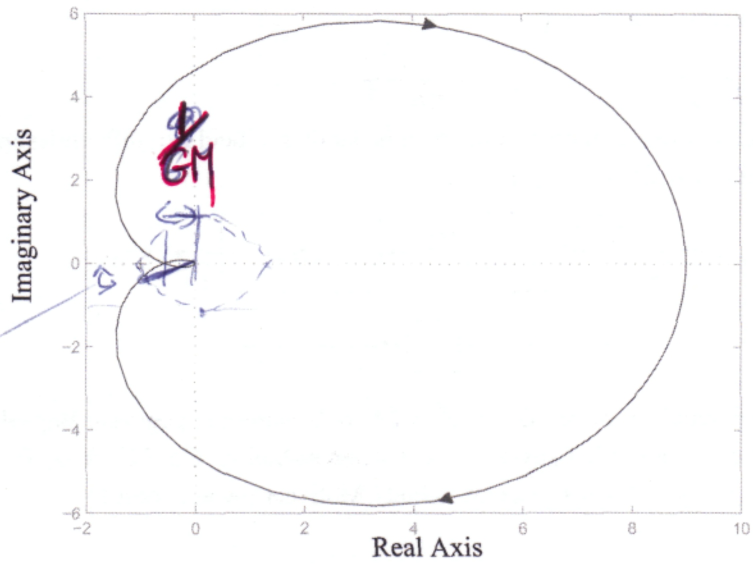


4

$Z = N + P$ P: aantal polen in RHP van L:
met $\tau_e, \tau_m, \tau_t > 0$, dan $P = 0$ 1
N: aantal omcirkelingen met klok mee: dan $N = 2$ 1
dus $Z = 2$, is aantal gesloten lus polen in RHP ⇒ instabiel 1
Stabiel voor $K < \frac{54}{3} = 18$ 1

Naam:	Student ID:	Datum:

b). Beschouw nu de Nyquist plot van L voor een andere waarde van K, zoals hieronder



Wat is de waarde van K? Geef een schatting van de gain marge (GM) en fase marge (PM). Geef in de plot aan hoe u hieraan komt.

5

$K = 9$ (1/6 van plot in a), dus $K = \frac{54}{6} = 9$) 2

$1/GM \approx 0,5$ $\Rightarrow GM = 2$ 1 PM $\approx$ 10 tot 20°, zie Plot 1 1

c). Wat is de steady state waarde van de fout bij een stap referentiesignaal? Van welk type is deze lusoverdracht? Motiveer uw antwoord!

6

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\, E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} S(s)$ 1

$S(s) = \frac{1}{1 + DG(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{(\tau_m s+1)(\tau_e s+1)(\tau_\ell s+1)}} = \frac{1}{1+K}$

Dus $e_{ss} = \frac{1}{1+K}$ 3

$L(s) = \frac{K}{(\tau_m s+1)(\tau_e s+1)(\tau_\ell s+1)}$ $\lim_{s \to 0} L(s) = K \neq 0$

dus type 0 2

Naam:	Student ID:	Datum:

Z.O.Z.

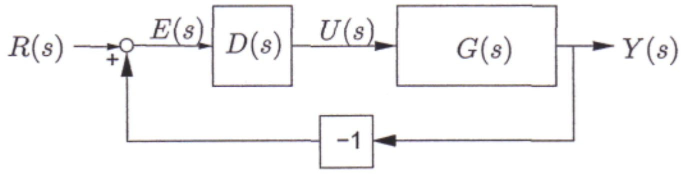
Naam:	Student ID:	Datum:

Opgave 6 (20 punten)

Gegeven is een open-lus systeem met overdrachtsfunctie: $$G(s) = \frac{11}{s(s+2)}.$$

Voor dit systeem wordt een lead compensator van de vorm $$D(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

ontworpen in de gesloten lus configuratie zoals in onderstaande figuur.



De specificaties voor het gesloten lus systeem zijn

1. Een steady state fout voor een lijnreferentiesignaal ($R(s) = \frac{1}{s^2}$) kleiner dan 0.1.
2. Een fase marge $PM \geq 65°$

a). Bepaal een waarde voor K om aan specificatie 1 te voldoen. Motiveer uw antwoord!

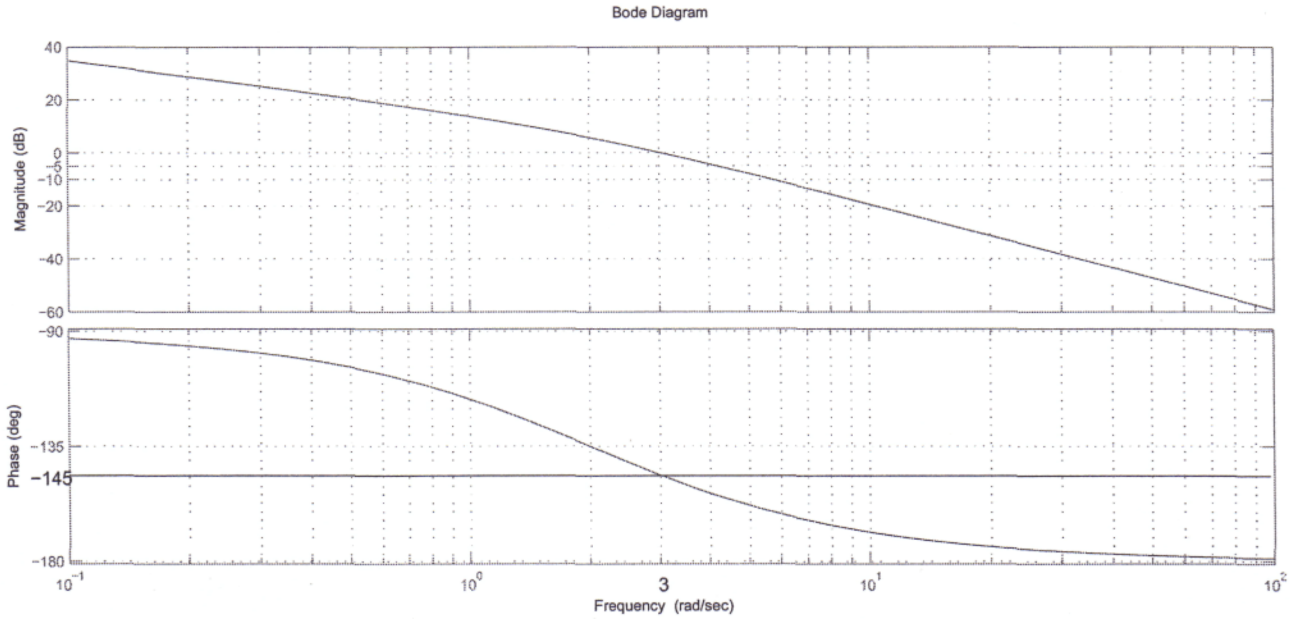
4

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\,\frac{1}{1+L(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+\frac{11K(Ts+1)}{s(s+2)(\alpha Ts+1)}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\,\frac{s(s+2)(\alpha Ts+1)}{s(s+2)(\alpha Ts+1)+11K(Ts+1)}$$

$$= \frac{2}{11K} < 0.1 \Rightarrow \text{neem } K = 2\text{, dan o.k.}$$

De Bode plot van $G(s)$ is als volgt:



Naam:	Student ID:	Datum:

Voor een lead compensator gelden de volgende relaties, met ω_{max} de frequentie waar je maximale fase toevoegt en ϕ_{max} de bijbehorende fase:

$$\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha = \frac{1 - \sin\phi_{max}}{1 + \sin\phi_{max}}, \quad |D(\omega_{max})| = \frac{K}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \text{(in dB's :)}\ 20\log_{10} K + 10\log_{10}\frac{1}{\alpha} dB$$

b). Wat is de cross-over frequentie en de fase marge PM van $G(s)$? Motiveer uw antwoord!

3

$\omega_c = 3$, PM $= 180 - 145 = 35°$

$\downarrow$

$|G| = 1 = 0$ dB

c). Hoeveel extra fase moet toegevoegd worden? Motiveer uw antwoord!

3

Voor PM $\geq 65°$ moet $30°$ toegevoegd worden.

d). Bepaal α. Motiveer uw antwoord!

3

$$\alpha = \frac{1 - \sin 30°}{1 + \sin 30°} = 0{,}33$$

e). Wat is de amplitude (gain) toename a.g.v. de lead compensator? Bepaal hieruit de cross-over frequentie van het gesloten lus systeem.

4

toename in dB's: $10 \log_{10} \frac{1}{\alpha} + 20 \log_{10} K = 4{,}8 + 6{,}0 \approx 11$ dB

-11 dB bij ~~ongeveer~~ $\omega \approx 6$, dus nieuwe $\omega_c = 6$.

g). Geef $D(s)$.

3

Break points: $\sqrt{\alpha} \cdot 6 = \frac{1}{T} = 3{,}5$ en $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot 6 = 10{,}4 = \frac{1}{T\alpha}$

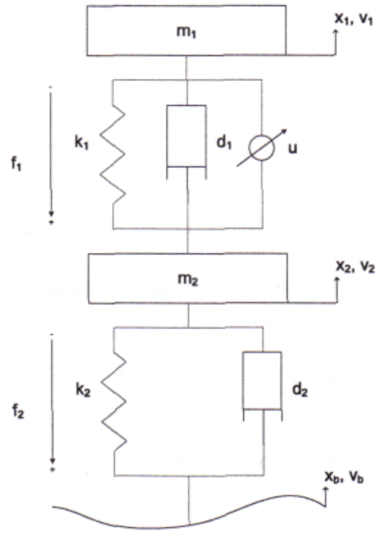
dus $D(s) = 2 \cdot \left(\frac{s/3.5 + 1}{s/10.4 + 1} \right)$

Naam:	Student ID:	Datum:

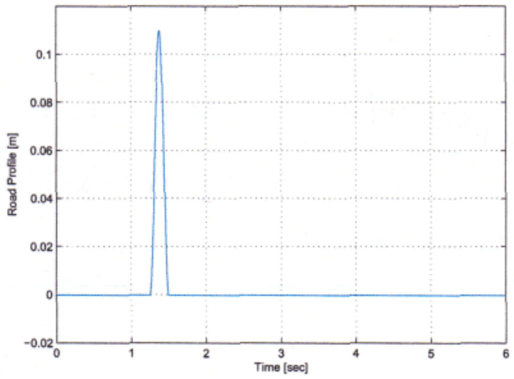
Naam:	Student ID:	Datum:

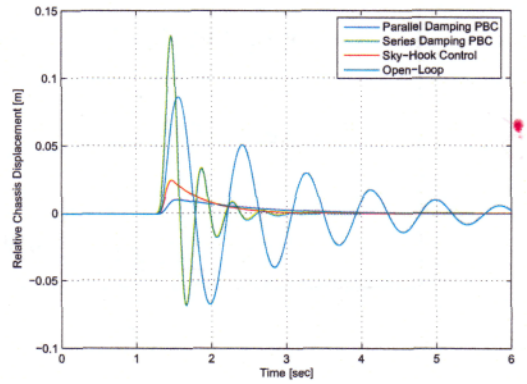
BONUSopgave 7 (10 punten)

Beschouw nu het volgende industriële actieve suspensiesysteem, waarbij u de regelinput is.



We zijn geïnteresseerd in het comfort van de passagier in de auto. Neem als uitgang de relatieve positie van m_1 t.o.v. de weg, d.w.z., $y = x_1 - x_b$, en we willen die graag constant houden (het referentiesignaal is dus constant). In huidige industriële implementaties zit veelal de zogenaamde "sky hook"regelaar, d.w.z., $u = -d_{sky}v_1$, een virtuele demper tussen de chassis en de "sky". Daarnaast zijn er nog 2 andere regelaars mogelijk, nl. één die te interpreteren is als een virtuele demper *op* veren in de regeling (de zogenaamde series damping PBC) en één die te interpreteren is als virtuele demper *tussen* de veren en de massa (de zogenaamde parallel damping PBC). Voor de series damping PBC zijn de snelheden van m_1 en van m_2 nodig. Voor de parallel damping PBC zijn de veerkrachten f_1 en f_2 nodig. Hieronder staat de responsie op een impulse-achtige wegoneffenheid weergegeven voor de open lus responsie (zonder regeling) en voor de drie hierboven gegeven gesloten lus responsies.





Naam:	Student ID:	Datum:

a). Wat kunt u concluderen op basis van de responsie? Motiveer uw antwoord.

2

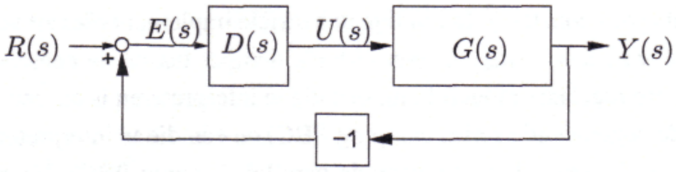
Underdamped.
overshoot

b). Kunt u iets zeggen over karakteristieken van het systeem? Zo ja, welke? Zo nee, waarom niet?

3

Nee, karakteristieken zijn gedefinieerd voor stapresponsie!

c). Beschouw het onderstaande blokschema:



Stel x_b is constant. Wat is $D(s)$ in het geval van de sky hook regeling $u = -d_{sky}v_1$? Wat voor soort regeling is dit?

5

Uitgang: positie m_1

Regeling: $\frac{d}{dt}$ positie, dus D regeling (uit PID stuk).

Alléén demping dus.

EINDE TENTAMEN